INTEGRACIÓ

1. En cada cas, dibuixeu una regió que tingui per àrea la integral definida corresponent

   (a) $\displaystyle\int_0^2 (2x+5)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x|\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-|x|)\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^4 (4x-x^2)\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

2. Un objecte es mou al llarg de l'eix X de manera que la seva velocitat en funció del temps és $v(t) = 2 - 3t + t^2$ m/s. Se sap que la posició inicial és $x(0) = 3$.

   (a) Determineu la posició de l'objecte en qualsevol instant t.

   (b) Determineu els intervals de temps en què el moviment és cap a la dreta o cap a l'esquerra.

   (c) Determineu la posició a l'instant $t = 3$ i calculeu la distància total recorreguda a l'interval $0 \le t \le 3$.

3. Se sap que la densitat lineal d'un filferro de longitud 1m. és el quadrat de la distància a un dels seus extrems. Calculeu la massa del filferro.

4. En cada cas, feu un dibuix de les gràfiques de les corbes donades i calculeu l'àrea de la regió que limiten:

   (a) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = 2x + 5$ (b) $y = x$, $y = \sin x$, $x = \pi/2$

   (c) $y = \cos x$, $y = 4x^2 - \pi^2$ (d) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $y = x - 1$

   (e) $y = x^2 - 4x + 3$, $y = -x^2 + 2x + 3$ (f) $y = 8x$, $y = x$, $y = 8/x^2$

5. Calculeu les primitives següents directament o amb un canvi de variable.

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int \sin(e^{5x})e^{5x}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt[4]{\cos^3 x}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x - \cos x}}\,dx$

   (g) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ (i) $\displaystyle\int x\sin(x^2+1)\,dx$

6. Calculeu les primitives següents integrant per parts:

   (a) $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int x^3 \sin x\,dx$ (c) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$

   (d) $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)\,dx$ (e) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx$ (f) $\displaystyle\int x\arctan x$

   (g) $\displaystyle\int (x^2-2x+5)e^{-x}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$

7. Calculeu les primitives següents fent canvis de variable convenients

(a) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+e^{-2x}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)\sqrt{\ln(\ln x)}}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int (x+1)(x-2)^{10}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$

8. Els canvis $x = r\sin t$, $x = r\cos t$ funcionen bé per calcular primitives que contenen l'expressió $\sqrt{r^2-x^2}$.

   (a) Feu el canvi de variable $x = r\sin t$ i transformeu la primitiva $\displaystyle\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx$ en una primitiva en la variable t.

   (b) Calculeu $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2-x^2}\,dx$.

   (c) Comproveu que de l'apartat anterior es dedueix la fórmula coneguda de l'àrea d'un cercle.

9. Calculeu les integrals impròpies següents en cas que siguin convergents o si no establiu la seva divergència

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$ (b) (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ (f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

10. (a) Calculeu les primitives $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$ i $\displaystyle\int x^2e^{-x}\,dx$.

    (b) Dibuixeu les gràfiques de $y = xe^{-x}$ i $y = x^2e^{-x}$ i calculeu els punts d'intersecció.

    (c) Calculeu l'àrea total limitada per les corbes $y = x^2e^{-x}$ i $y = xe^{-x}$.

11. La temperatura d'un indret des de les 6h. fins a les 12h. del matí ve donada per la fórmula

$$T(t) = 5 + 15\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) \quad (0 \le t \le 6)$$

on t representa el temps (en hores a partir de les 6 del matí). Determineu la temperatura mitjana entre les 8 i les 12.

12. Com aplicació del Principi de Cavalieri, calculeu els volums dels sòlids següents

    (a) Un cilindre inclinat un angle de $\pi/6$ respecte de la vertical d'alçada 10m. i radi de la base 4m.

    (b) Una piràmide de base un quadrat de 4m. de costat i d'alçada 12m.

    (c) Un con recte amb alçada h i base un cercle de radi r.

    (d) El volum de revolució obtingut quan la regió $\{(x,y) : 0 \le x \le 2\,, 0 \le y \le x^2\}$ gira al voltant de l'eix X.

    (e) El sòlid intersecció de dos cilindres de radi r i eixos perpendiculars.